微分法とその応用

例題 1　極限・微分係数の定義

（ア）

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2-1}$ と $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x^2-1}$ がそれぞれ 4 と 2 に収束するから，

$f(x)$ が x^2-1 を因数にもつことが必要である。

すなわち，因数定理より， $f(1)=0$ かつ $f(-1)=0$ であることが必要である。

よって， $a+b+c+d=0$ かつ $-a+b-c+d=0$

これより， $c=-a$ ， $d=-b$

よって， $f(x)=ax^3+bx^2-ax-b$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{f(x)}{x^2-1} &= \frac{ax^3+bx^2-ax-b}{x^2-1} \\ &= \frac{(x^2-1)(ax+b)}{(x^2-1)} \\ &= ax+b\end{aligned}$$

これと $\begin{cases} \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = 4 \\ \lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x^2-1} = 2 \end{cases}$ より， $\begin{cases} a+b=4 \\ -a+b=2 \end{cases}$　$\therefore a=1, b=3$

よって， $a=1, b=3, c=-1, d=-3$

（イ）

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{(1+2h)-1} = f'(1)$， $f'(1)=4$ より， $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} = 4$　$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h} = 8$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1-3h)-f(1)}{(1-3h)-1} = f'(1)$， $f'(1)=4$ より， $\lim_{h \to 0} \frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h} = 4$　$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(1-3h)-f(1)}{h} = -12$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(1+2h)-f(1)}{h} - \frac{f(1-3h)-f(1)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(1-3h)-f(1)}{h} \\ &= 8-(-12) \\ &= 20\end{aligned}$$

例題 2　極値を求める／次数下げ

$f(x)=-x^3+6x^2-x+1$ とおくと，$f'(x)=-3x^2+12x-1$

ここで，$f'(x)=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，$\alpha=\dfrac{6-\sqrt{33}}{3}$

また，増減は次のようになり，

x		α		β	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\downarrow$	$f(\alpha)$	$\uparrow$	$f(\beta)$	$\downarrow$

これと $-1<\alpha<3<\beta$ より，$-1\leq x\leq 3$ における増減は次のようになる。

x	-1		α		3
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	9	$\downarrow$	$f(\alpha)$	$\uparrow$	25

よって，最小値は $f(\alpha)$ であり，$f'(\alpha)=0$ より，$-3\alpha^2+12\alpha-1=0$

$$\begin{aligned}\therefore f(\alpha)&=-\alpha^3+6\alpha^2-\alpha+1\\&=\frac{1}{3}(\alpha-2)(-3\alpha^2+12\alpha-1)+\frac{22}{3}\alpha+\frac{1}{3}\\&=\frac{22}{3}\alpha+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

これに $\alpha=\dfrac{6-\sqrt{33}}{3}$ を代入することにより，最小値 $f(\alpha)=\dfrac{135-22\sqrt{33}}{9}$

例題 3　極値の条件から求める

（イ）

(2)

別解

$f'(x)=0$ すなわち $x^2-2ax+b=0$ の 2 実数解を α,β （$\alpha<\beta$）とすると，

極大値 $f(\alpha)$，極小値 $f(\beta)$ より，$f(a)-f(\beta)=4$

$$f(\alpha)-f(\beta)=\alpha^3-3a\alpha^2+3b\alpha-\left(\beta^3-3a\beta^2+3b\beta\right)$$
$$=\alpha^3-\beta^3-3a\alpha^2+3a\beta^2+3b\alpha-3b\beta$$

ここで，$f'(\alpha)=0$，$f'(\beta)=0$ だから，$\alpha^2-2a\alpha+b=0$，$\beta^2-2a\beta+b=0$ より，

$\alpha^3=2a\alpha^2-b\alpha$，$\beta^3=2a\beta^2-b\beta$

$$\therefore f(\alpha)-f(\beta)=\alpha^3-\beta^3-3a\alpha^2+3a\beta^2+3b\alpha-3b\beta$$
$$=2a\alpha^2-b\alpha-\left(2a\beta^2-b\beta\right)-3a\alpha^2+3a\beta^2+3b\alpha-3b\beta$$
$$=-a\alpha^2+a\beta^2+2b\alpha-2b\beta$$
$$=a(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)-2b(\beta-\alpha)$$
$$=(\beta-\alpha)\{a(\beta+\alpha)-2b\}$$

再び，ここで，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=b$ だから，

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4a^2-4b}=2\left(a^2-b\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore f(\alpha)-f(\beta)=2\left(a^2-b\right)^{\frac{1}{2}}\left(2a^2-2b\right)$$
$$=4\left(a^2-b\right)^{\frac{3}{2}}$$

これと $f(\alpha)-f(\beta)=4$ より，$4\left(a^2-b\right)^{\frac{3}{2}}=4$　　$\therefore a^2-b=1$

例題 7　実数解の個数／定数項以外に文字定数

(1)

$\dfrac{a+3}{a} \geq 0 \Leftrightarrow a(a+3) \geq 0$，$a \neq 0$ より，$a \leq -3$，$0 < a$

(2)

$f(x)$ が 3 個の異なる実数解をもつためには，極大値と極小値の積が負であればよい。

つまり，(1)より，$f'(x)=0$ の実数解は，$\pm\sqrt{\dfrac{a+3}{3a}}$ （$a \leq -3, 0 < a$）であり，

$\alpha = \sqrt{\dfrac{a+3}{3a}}$ とおくと，$f(\alpha)\cdot f(-\alpha) < 0$

すなわち $\{a\alpha^3-(a+3)\alpha+a+3\}\{-a\alpha^3+(a+3)\alpha+a+3\}<0$ あればよい。

ここで，$f'(\alpha)=0$ より，$3a\alpha^2-(a+3)=0$　$\therefore a\alpha^2 = \dfrac{a+3}{3}$

よって，$a\alpha^3 = \dfrac{a+3}{3}\alpha$

これを上の不等式に代入すると，

$\left\{\dfrac{a+3}{3}\alpha-(a+3)\alpha+a+3\right\}\left\{-\dfrac{a+3}{3}\alpha+(a+3)\alpha+a+3\right\}<0$ より，$(a+3)^2\left(1-\dfrac{4}{9}\alpha^2\right)<0$

$\therefore 1-\dfrac{4}{9}\alpha^2<0$

これと $\alpha^2=\dfrac{a+3}{3a}$ より，$1-\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{a+3}{3a}<0$　$\therefore \dfrac{23a-12}{27a}<0$

$\dfrac{23a-12}{27a}<0 \Leftrightarrow 27a(23a-12)<0$ （$a \neq 0$）より，$0<a<\dfrac{12}{23}$